Ministerio de Educación

República de Panamá

Centro educativo bilingüe Bellas Luces

Módulo II

Profesora:

Naidili Navarro

Estudiante:

____

Materia:

Matemáticas

Grado:

11° ciencias

Año:

2020

Indicaciones:

Enviar respuestas al correo: naidilinavarro@hotmail.com el día 1 de mayo de 2020 con las respuestas escaneadas (si no tiene impresora en los celulares táctiles se pueden descargar aplicaciones de escaneo) y su debido procedimiento.

Colocar su nombre completo y grado en el correo

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Sea α un ángulo. Las razones trigonométricas del ángulo doble (2α) se pueden expresar en función de las razones trigonométricas del ángulo α.

Seno del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

Coseno del ángulo doble:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Tangente del ángulo doble:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Ejemplos:

Sea un ángulo α=30º. Las razones trigonométricas de su ángulo doble son:

Seno del ángulo doble de 30°

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2\cdot 30^o) &= 2\operatorname{sen}30^o \cdot \cos 30^o \\ &= \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 = \operatorname{sen}60^o\end{aligned}$$

Se reemplaza según la razón que necesiten en este caso el del seno. Recuerde utilizar la tabla de ángulos.

En una multiplicación de fracciones se simplifica siempre que es posible.

Coseno del ángulo doble de 30°

$$\begin{aligned}\cos(2\cdot 30^o) &= \cos^2 30^o - \operatorname{sen}^2 30^o \\ &= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 = \cos 60^o\end{aligned}$$

Se reemplaza la ecuación del coseno de doble ángulo.

$$\left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\cancel{2}} = \frac{3}{4}$$

Tangente del doble ángulo de 30°

$$\tan(2\cdot 30^{o}) = \frac{2\tan 30^{o}}{1-\tan^2 30^{o}}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

La matemática es una materia secuencial por lo que deben recordar el tema de fracciones, por suerte tienen la calculadora y otros medios para ayudarse.

$$= \frac{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}}{1-\cancel{\frac{3}{9}}}$$

$$\frac{Resolver\ la\ multiplicación\ en\ la\ parte\ de\ arriba}{Resolver\ el\ cuadrado\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\ y\ restar\ abajo}$$

$$= \frac{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}$$

Dividir si es necesario.

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \underline{\sqrt{3} = 1,732 = \tan 60^{o}}$$

Actividad n° 1

Buscar la razón de doble ángulo seno, cos y tangente de los ángulos pedidos:

- 45°
- 60°

Suma y resta de ángulos

Identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos:

$$\sin\,(A+B) = \sin\ A \cdot \cos\ B + \cos\ A \cdot \sin\ B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$$\cos\,(A+B) = \cos\ A \cdot \cos\ B - \sin\ A \cdot \sin\ B$$

$$\cos\,(A-B) = \cos\ A \cdot \cos\ B + \sin\ A \cdot \sin\ B$$

$$\tan\,(A+B) = \frac{\tan\ A + \tan\ B}{1 - \tan\ A \cdot \tan\ B}$$

$$\tan\,(A-B) = \frac{\tan\ A - \tan\ B}{1 + \tan\ A \cdot \tan\ B}$$

Ejemplo:

1. Sumar *sen (A+B)* de los ángulos: sin A = $\frac{3}{4}$, más sin B = $\frac{2}{6}$
   Es necesario utilizar la ecuación $\sin\,(A+B)$.

$$\sin(A+B) = \sin\ A \cdot \cos\ B + \cos\ A \cdot \sin\ B$$

$$\sin(A+B) = \frac{3}{4} \cdot \cos\ B + \cos\ A \cdot \frac{2}{6}$$

Para trabajar estas ecuaciones es necesario conocer 4 identidades trigonométricas el sen A, cos A, sen B, cos B. Pero solo tengo 2: sen A y sen B me faltan cos A y cos B, por lo que primero debo buscar el coseno de A y coseno de B.

sin A = $\frac{3}{4}\ \frac{l.o.}{hip}$

cos A= $\frac{l.a}{hip} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$l.a^2 + l.o^2 = hip^2$$
$$l.a = \sqrt{hip^2 - l.o^2}$$
$$l.a = \sqrt{4^2 - 3^2}$$
$$l.a = \sqrt{7}$$

sin B = $\frac{2}{6}$

cos B= $\frac{l.a}{hip} = \frac{\sqrt{32}}{6}$

$$l.a^2 + l.o^2 = hip^2$$
$$l.a = \sqrt{hip^2 - l.o^2}$$
$$l.a = \sqrt{6^2 - 2^2}$$
$$l.a = \sqrt{32}$$

Encontrar una función a partir de otra fue dado en clase y en el módulo anterior

Ahora si tenemos completo nuestros datos:

$$\sin(A+B) = \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{32}}{6}} + \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{2}{6}}$$
$$= \frac{3\sqrt{32}}{24} + \frac{2\sqrt{7}}{24}$$
$$= \frac{3\,\sqrt{32} + 2\,\sqrt{7}}{24}$$

Se resuelve la operación encontrada.

1. Multiplica
2. Suma las respuestas

Actividad n° 2

Sume o reste las identidades pedidas.

1. Cos (A -B) de: Sen A = $\frac{3}{4}$ y Sen B = $\frac{6}{8}$
2. Sen (A + B) de: Sen A = $\frac{1}{3}$ y Cos B = $\frac{3}{5}$
3. Cos (A + B) de Cos A =$\frac{3}{7}$ y Cos B = $\frac{1}{2}$
4. Sen (A – B) de:
   Sen A = $\frac{2}{3}$; en π < A < $\frac{3\pi}{2}$
   Sen B = $\frac{3}{4}$; en 0 < B < $\frac{\pi}{2}$
   Recuerde que la información de los radianes es para conocer el cuadrante en el que está el ángulo, utilizado para colocar los signos a las funciones ala hora de resolver.
5. Tan (A - B) de las funciones sen A=$\frac{2}{5}$ y Tan B= $\frac{4}{5}$

Actividad n°3

Investigue sobre los números complejos

- Definición
- Elementos que componen un numero complejo
- Escriba 3 números complejos